Feladat 1. Egy **G** csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. Mutassa meg, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció.

Megoldás: Három dolgot kell leellenőrizni:

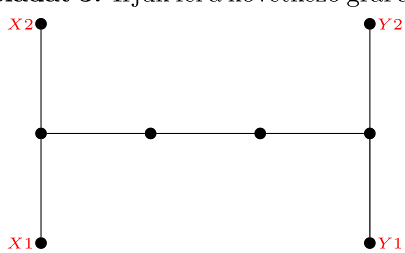
- Reflexivitás: minden $g \in G$ esetén $g = 1^{-1} \cdot g \cdot 1 = g$, így $g \sim g$.
- Szimmetrikusság: Ha $g_1 \sim g_2$, akkor valamely h-ra $h^{-1}g_1h = g_2$, ekkor $(h^{-1})^{-1}g_2h^{-1} = hh^{-1}g_1hh^{-1} = g_1$, ezért $g_2 \sim g_1$.
- Tranzitivitás: Ha $g_1 \sim g_2$ és $g_2 \sim g_3$, akkor valamely h_1, h_2 elemekre $h_1^{-1}g_1h_1 = g_2$ és $h_2^{-1}g_2h_2 = g_3$, amikor is $(h_1h_2)^{-1}g_1(h_1h_2) = h_2^{-1}h_1^{-1}h_1h_2 = h_2^{-1}g_2h_2 = g_3$, tehát $g_1 \sim g_3$.

Feladat 2. Mik a konjugáltsághoz, mint ekvivalencia relációhoz tartozó osztályozás elemei a **V**, illetve a **Q** csoportok esetén?

Megoldás: A **V** Abel-csoport, és Abel-csoportban a konjugáltság az egyenlőség reláció, hiszen $h^{-1}g_2h = g_2h^{-1}h = g_2$. Az osztályozás: $\{\{1\}, \{i\}, \{j\}, \{k\}\}$.

Nézzük a **Q**-t: 1 és -1 minden elemmel felcserélhető, ezért ezeket bármivel konjugálva önmagukat kapjuk. Ha az i elemet az 1, -1, i, $-i$ elemek valamelyikével konjugáljuk, i-t kapunk (mert ezek i-vel felcserélhetők). Az i j-vel való konjugáltja: $j^{-1}ij = (-j)ij = -jij = ijj = -i$. Kiszámítható, hogy az i konjugáltja a $-j$, k, $-k$ elemek bármelyikével szintén $-i$. Így i osztálya $\{i, -i\}$. Hasonlóan látható, hogy $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$ konjugáltsági osztályok. Az osztályozás: $\{\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$.

Feladat 3. Írjuk fel a következő gráf automorfizmusainak csoportját műveletttáblával:



Megoldás: Az $X1$, $X2$, $Y1$, $Y2$ csúcsokat minden automorfizmus egymásba viszi, hiszen ezek az elsőfokú csúcsok. Jól látható, hogy ezen csúcsok képei egyértelműen meghatározzák az automorfizmust. Feltétel még, hogy az $X1$ és az $X2$ csúcsok képei vagy az $X1$ és az $X2$, vagy az $Y1$ és az $Y2$ csúcsok legyenek valamilyen sorrendben. Erre 8 lehetőség van:

- A: $X_1 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $Y_1 \to Y_1$, $Y_2 \to Y_2$
- B: $X_1 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $Y_1 \to Y_2$, $Y_2 \to Y_1$
- C: $X_1 \to X_2$, $X_2 \to X_1$, $Y_1 \to Y_1$, $Y_2 \to Y_2$
- D: $X_1 \to X_2$, $X_2 \to X_1$, $Y_1 \to Y_2$, $Y_2 \to Y_1$
- E: $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $Y_1 \to X_1$, $Y_2 \to X_2$
- F: $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $Y_1 \to X_2$, $Y_2 \to X_1$
- G: $X_1 \to Y_2$, $X_2 \to Y_1$, $Y_1 \to X_1$, $Y_2 \to X_2$
- H: $X_1 \to Y_2$, $X_2 \to Y_1$, $Y_1 \to X_2$, $Y_2 \to X_1$

Ezeket az automorfizmusokat úgy szorozhatjuk össze, mintha négyelemű alaphalmaz permutációi volnának:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	A	B	C	D	E	F	G	H
B	B	A	D	C	F	E	H	G
C	C	D	A	B	H	G	E	F
D	D	C	B	A	G	H	F	E
E	E	G	H	F	A	D	B	C
F	F	H	G	E	B	C	A	D
G	G	E	F	H	D	A	C	B
H	H	F	E	G	C	B	D	A

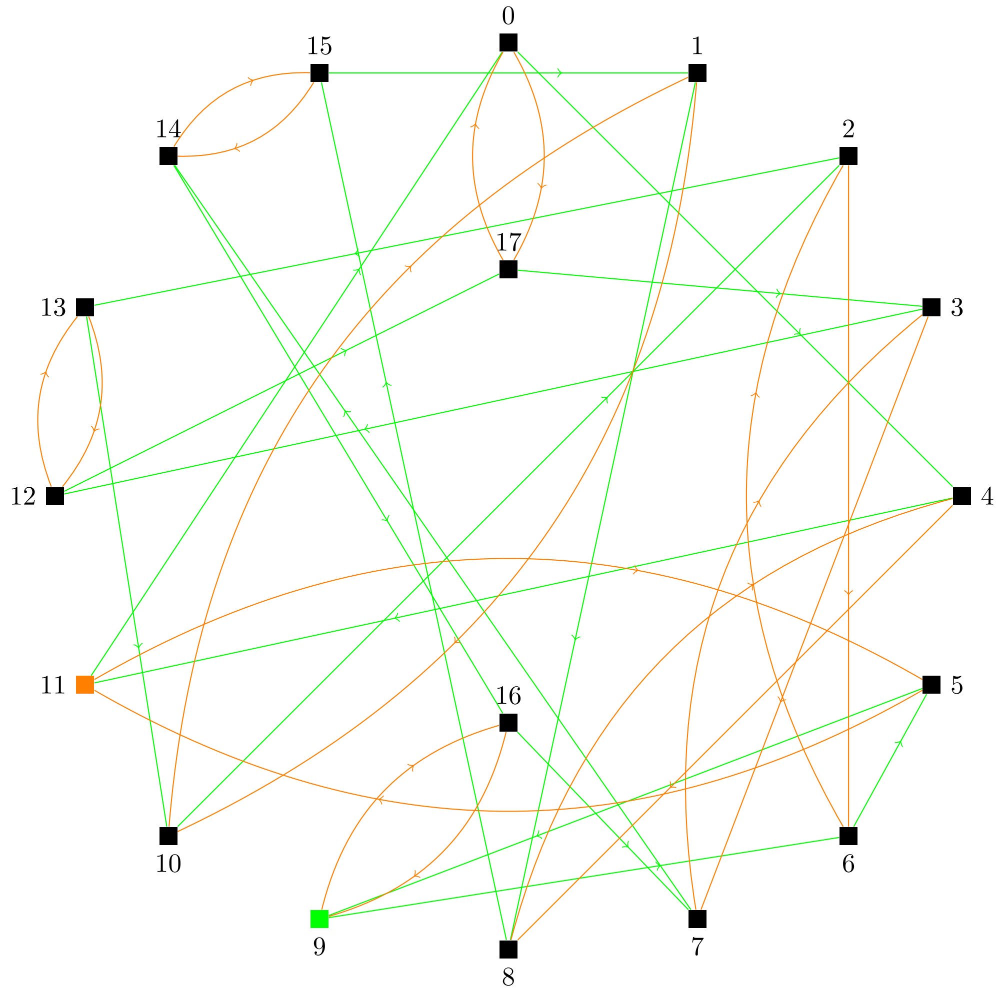
Észrevehető, hogy ez a csoport izomorf $\mathbf{D}_4$-gyel.

Feladat 4. Tekintsük a következő művelettáblával megadott csoportot:

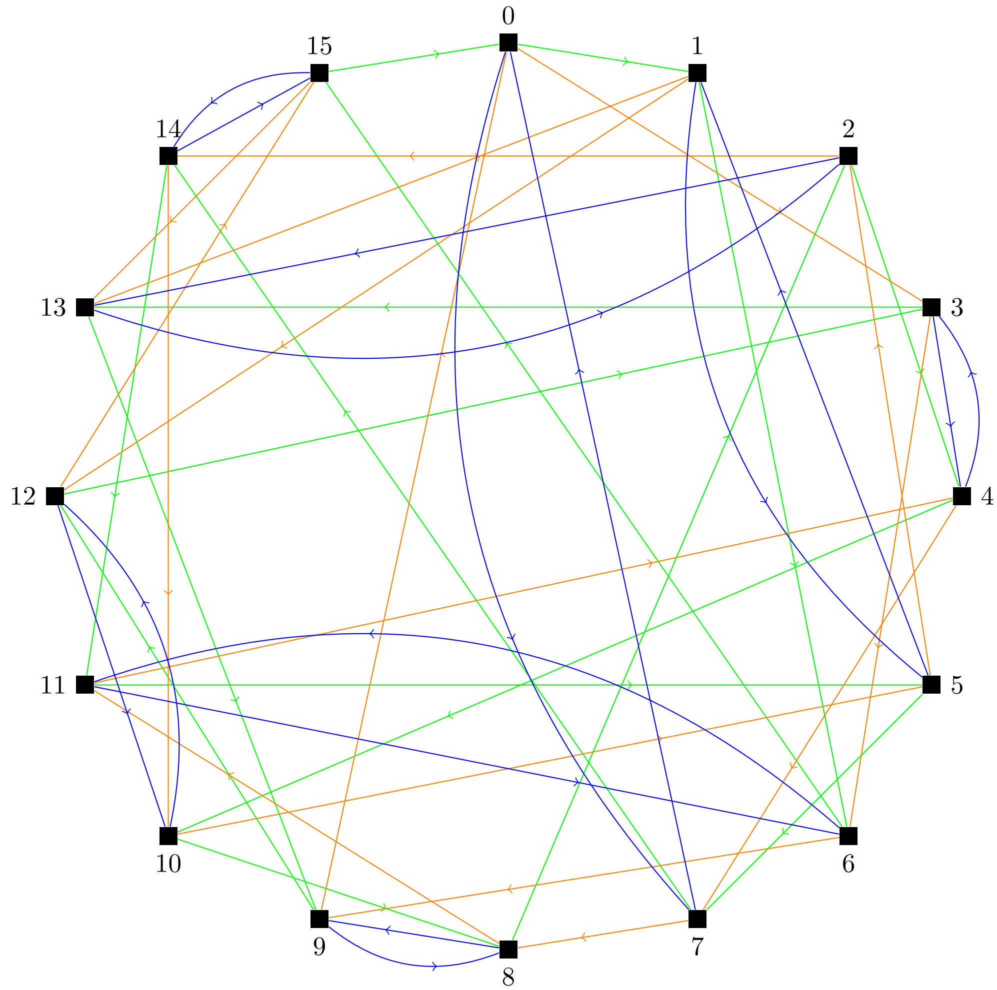
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	3	2	5	14	12	0	11	15	13	4	6	17	16	9	1	10	8	7
1	2	3	14	5	13	1	15	11	12	8	7	10	9	16	0	17	4	6
2	5	14	1	0	9	2	10	17	16	13	15	6	4	8	3	7	12	11
3	14	5	0	1	16	3	17	10	9	12	11	7	8	4	2	6	13	15
4	15	13	17	16	1	4	0	9	10	11	12	8	7	3	6	2	5	14
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	13	15	16	17	10	6	9	0	1	5	14	2	3	7	4	8	11	12
7	12	11	9	10	17	7	16	1	0	14	5	3	2	6	8	4	15	13
8	11	12	10	9	0	8	1	16	17	15	13	4	6	2	7	3	14	5
9	7	8	11	12	14	9	5	13	15	6	4	16	17	0	10	1	2	3
10	8	7	12	11	15	10	13	5	14	2	3	1	0	17	9	16	6	4
11	9	10	8	7	6	11	4	3	2	0	1	5	14	15	12	13	17	16
12	10	9	7	8	2	12	3	4	6	17	16	13	15	14	11	5	0	1
13	17	16	6	4	3	13	2	8	7	10	9	12	11	5	15	14	1	0
14	1	0	3	2	8	14	7	6	4	16	17	15	13	12	5	11	9	10
15	16	17	4	6	7	15	8	2	3	1	0	14	5	11	13	12	10	9
16	6	4	15	13	5	16	14	12	11	7	8	9	10	1	17	0	3	2
17	4	6	13	15	11	17	12	14	5	3	2	0	1	10	16	9	7	8

Adjuk meg ennek a csoportnak a Cayley-gráfját.

Megoldás: Kételemű generátorrendszert választunk: $\{9, 11\}$. Ezután csak annyi a dolgunk, hogy a csoport alaphalmazának minden eleméhez rendeljünk egy cscsot, s minden elemhez tartozó csúcsból irányítsunk egy zöld élet az elem (csoportbeli) 9-szereséhez tartozó csúcsba, és egy narancs élet a 11-szereséhez tartozó csúcsba.



Feladat 5. Adjuk meg a következő Cayley-gráfú csoportban előforduló elemrendeket, és azok multiplicitásait.



Megoldás: Válasszunk egységelemet, legyen ez a 4. A csoport generátorrendszerét azok az elemek fogják alkotni, amelybe megy él az egységelemből. Ezek: 10, 7, és 3. A csoport minden eleme felírható ezek szorzataként: megnézzük, hogy hogyan jutunk el a 4-es csúcsból az adott csúcsba színes éleken, és ez az út mutatja a felírást. Miutn megvan ez a felírás, tudunk tetszőleges elemeket szorozni, mert ezt visszavezettük 10-zel, 7-tel, illetve 3-mal való szorzások elvégzésere, ami kiolvasható az ábráb´l. Így a rendek is kiszámíthatóak. A csoport 16 rendű, így minden elem rendje 2-hatvány. Elég lesz inden elem négyzetét kiszámolnunk, abból a rendek leolvashatók.

- Az 1-es csúcs a 4-esbő elérhető KÉK-ZÖLD-NARANCS úton. Tehát $1 = 3 \cdot 10 \cdot 7$, és $1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 7$, ami elérhető 1-bl KÉK-ZÖLD-NARANCS úton. Tehát $1 \cdot 1 = 8$.
- Mivel $2 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{-1}$, $2 \cdot 2 = 10^{-2} = 8$.
- $3 \cdot 3 = 4$, hiszen a KÉK körök kettő hosszúak.
- Az egységelem elsőrendű.
- Mivel $5 = 7^{-1} \cdot 10$, $5 \cdot 5 = 5 \cdot 7^{-1} \cdot 10 = 8$.

- Mivel $6 = 3 \cdot 7$, $6 \cdot 6 = 6 \cdot 3 \cdot 7 = 4$.
- $7 \cdot 7 = 8$.
- Mivel $8 = 7 \cdot 7$, $8 \cdot 8 = 7^4 = 4$, hiszen a narancs körök 4 hosszúak.
- Mivel $9 = 10 \cdot 10 \cdot 3$, $9 \cdot 9 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 = 4$.
- $10 \cdot 10 = 8$.
- Mivel $11 = 7^{-1}$, $11 \cdot 11 = 7^{-2} = 8$.
- Mivel $12 = 3 \cdot 10^{-1}$, $12 \cdot 12 = 12 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 4$.
- Mivel $13 = 3 \cdot 10$, $13 \cdot 13 = 13 \cdot 3 \cdot 10 = 4$.
- Mivel $14 = 7 \cdot 10$, $14 \cdot 14 = 14 \cdot 7 \cdot 10 = 8$.
- Mivel $15 = 3 \cdot 7 \cdot 10$, $15 \cdot 15 = 15 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 = 8$.
- Mivel $0 = 3 \cdot 7^{-1}$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 3 \cdot 7^{-1} = 4$.

Tehát a csoportban egy első-, 7 másod-, és 8 negyedrendű elem van.